оно либо эрмитово, либо является шестимерным ZNK-многообразием с неинтегрируемой структурой.

Теорема 3. *Собственное ZNK-многообразие является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно с точностью до конциркулярного преобразования метрики локально голоморфно изометрично либо комплексному евклидову пространству $\mathbf{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой, либо шестимерной сфере S^6, снабженной канонической приближенно келеровой структурой.*

Б. Г. Габдулхаев (Казань)

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

В вещественном пространстве $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ квадратично-суммируемых 2π-периодических функций с обычными скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$ исследуются точные и приближенные методы решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения

$$a(s, x(s)) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s,\sigma) b(\sigma, x(\sigma)) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \, d\sigma =$$

$$= y(s), \quad -\infty < s < \infty; \tag{1}$$

здесь $a(s, u)$ и $b(s, u)$ — известные непрерывные функции в области $\mathbb{R}^2$, 2π-периодические по переменной s; $h(s, \sigma)$ — известная симметрическая H-непрерывная 2π-периодическая по каждой из переменных функция; $y(s)$ — данная, а $x(t)$ — искомая функции из L_2, причем λ — произвольный вещественный параметр.

1. Теорема существования и единственности решения

Теорема 1. *Пусть для любых* $s, u, v \in \mathbb{R}$ *и некоторых* $M_1, M_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+$ *выполнены условия:*

$$|a(s,u)-a(s,v)| \le M_1|u-v|, \quad [a(s,u) - a(s,v)](u-v) \ge m_1|u-v|^2,$$

$$|b(s,u)-b(s,v)| \le M_2|u-v|, \quad [b(s,u) - b(s,v)](u-v) \ge m_2|u-v|^2.$$

Тогда при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $y \in L_2$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2$, *причем*

$$\frac{1}{M_1}\frac{m_2}{M_2}\|y(s) - a(s,c(s,0))\| \le \|x^*(s)\| \le$$

$$\le \frac{1}{m_1}\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^2 \|y(s) - a(s,c(s,0))\|,$$

где функция $c(s,u)$ *определяется в следующем параграфе.*

2. Итерационный метод

Полагая $b(s,x(s)) = z(s)$, в условиях теоремы 1 имеем $x(s) \equiv c(s,z(s))$, где $c(s,u)$ — липшиц-непрерывная по переменной u функция с постоянной $\dfrac{1}{m_2}$ и сильно монотонная функция с постоянной $\dfrac{m_2}{M_2^2}$. Введем оператор $K : L_2 \to L_2$ по формуле

$$Kz \equiv a(s,c(s,z(s))) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)z(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma = y(s). \quad (2)$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение уравнения* (1) *можно найти итерационным методом*

$$x^i(s) = c(s,z^i(s)), \quad z^i = z^{i-1} + \frac{m}{M^2}\left(y - Kz^{i-1}\right), \quad i = 1,2,\ldots, \qquad (3)$$

$$m = m_1 m_2 M_2^{-2}, \quad M = M_1 m_2^{-1} + \|Ih\|,$$

сходящимся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left(1 - (m/M)^2\right)^{1/2} < 1$ *при любом начальном приближении* $z^0 \in L_2$; *здесь* $\|Ih\|$ *— норма сингулярного интегрального оператора с ядром Гильберта и с плотностью* $h(s,\sigma)$, *в частности,* $\|Ih\| = 1$ *при* $h(s,\sigma) = 1$.

3. Проекционные методы

Обозначим через $\{\varphi_i(s)\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему функций из $L_2(0, 2\pi)$. Приближенное решение уравнения (1) будем искать по формуле

$$x_n(s) = c(s, z_n(s)), \quad z_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(s), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \qquad (4)$$

где элемент $z_n(s)$ определим как решение конечномерного уравнения

$$P_n K z_n = P_n y, \quad P_n \varphi = \sum_{i=1}^n (\varphi, \varphi_i)\,\varphi_i, \quad \varphi \in L_2. \qquad (5)$$

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *уравнения* (2) *и* (5) *имеют единственные решения* $z^*(s) \in L_2$ *и* $z_n(s) \in L_2$ *при любых* $y \in L_2$ *и любых* $n \in \mathbb{N}$, *а приближенные решения* $x_n(s)$ *из* (4) *сходятся в* L_2 *к точному решению* $x^* \in L_2$ *уравнения* (1) *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$\frac{E_n(z^*)}{M_2} \le \|x^* - x_n\| \le \frac{(M_1 + m_2\|Ih\|)\,M_2}{m_1 m_2} E_n(z^*), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (6)$$

где $E_n(z^*)$ — *наилучшее среднеквадратическое приближение решения уравнения* (2) *всевозможными элементами вида* $z_n(s)$.

4. Квадратурные методы

Приближенное решение уравнения (1) при $y(s) \in C_{2\pi}$ ищется в виде

$$x_n^*(s) = c(s, z_n(s)), \quad z_n(s) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n \alpha_k \Delta_n(s - s_k), \quad s_k = \frac{2k\pi}{n}, \qquad (7)$$

где

$$\Delta_n(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(2n+1)\frac{\varphi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\varphi}{2} & \text{при } n = 2m+1\ (m+1 \in \mathbb{N}); \\ \frac{1}{2}\sin n\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} & \text{при } n = 2m\ (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяются из системы конечномерных уравнений

$$a(s_j, c(s_j, \alpha_j)) + \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^{n} h_{jk} \beta_{j-k} \alpha_k = y_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

где $y_j = y(s_j)$, $h_{jk} = h(s_j, s_k)$,

$$\beta_{j-k} = \beta_{j-k}(n) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{j-k}{2n}\pi, & \text{если } j-k \text{ четно;} \\ \operatorname{ctg} \dfrac{k-j}{2n}\pi, & \text{если } j-k \text{ нечетно} \end{cases}$$

при $n = 2m + 1$, а при $n = 2m$ —

$$\beta_{j-k} = \beta_{j-k}(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } j-k \text{ четно;} \\ 2\operatorname{ctg} \dfrac{k-j}{n}\pi, & \text{если } j-k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения (1) таковы, что в условиях теоремы 1 точное решение $x^*(s) \in C_{2\pi}$. Тогда система (8) имеет единственное решение и приближенные решения (7) сходятся к точному решению в пространстве L_2 со скоростью, определяемой структурными свойствами исходных данных; в частности, если они таковы, что $x^*(s) \in W^r H^\alpha$ ($r + 1 \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$), то*

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r + \alpha > 0. \quad (9)$$

Замечание. Условия на функции $a(s, u)$, $b(s, u)$ и $h(s, \sigma)$ могут быть ослаблены; напр., теоремы 1—4 остаются в силе и в том случае, когда функция $h(s, \sigma)$ не является симметричной, но удовлетворяет условию:

слабосингулярный интегральный оператор $\lambda I h^-$, где

$$I h^- x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(s, \sigma) - h(\sigma, s)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} x(\sigma)\, d\sigma, \quad x \in L_2,$$

является неотрицательным в пространстве L_2 или, более общо, наименьшее собственное значение λ_0 указанного симметричного оператора удовлетворяет неравенству $m_1 m_2 M_2^{-2} + \lambda_0 > 0$.